医学部	数　学

第1問 次の問い（問1～3）に答えよ。

問1 1以上の整数nに対して定義されるa_nについて$a_1=1$とし、xy平面における曲線$y=x^3$上の点$A_n(a_n,\ a_n^3)$における接線をL_nとする。直線L_nとx軸の交点を$B_{n+1}(a_{n+1},\ 0)$とすると、$a_{n+1}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}a_n$が成り立つ。また、曲線$y=x^3$と線分$A_nB_{n+1}$および$x$軸によって囲まれる部分の面積を$S_n$とすると、$S_1=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{クケコ}}}$である。

問2 $z\neq-\dfrac{1}{2}$である複素数zに対して、$w=\dfrac{3z+1}{2z+1}$と定める。このとき、zはwを用いて$z=\dfrac{-w+\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}w-\boxed{\text{ス}}}$と表される。$z$が純虚数であるとき、複素数平面において$w$の満たす点全体は、中心が$\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$、半径$\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$の円から2点$\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$、$\boxed{\text{ト}}$を除いたものである。

問3 さいころ1個を3回投げて、出た目を順にx_1、x_2、x_3とする。$x_1\cdot x_2\cdot x_3$が4の倍数となる確率は$\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$である。また、$x_1+(x_2)^2+(x_3)^3$が4の倍数となる確率は$\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$である。なお、さいころの6個の目について、どの目の出る確率も等しいものとする。

第2問 四面体OABCは辺の長さがOA = 8、OB = 9、OC = 10であり、$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$、$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$、$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$とおくと、内積の値はそれぞれ$\vec{a}\cdot\vec{b} = 64$、$\vec{b}\cdot\vec{c} = 82$、$\vec{c}\cdot\vec{a} = 64$を満たす。

また、3点A、B、Cを通る平面と点Dで接し、辺OA、OB、OCとそれぞれ点P、Q、Rで接する球をSとし、Sの中心をEとする。このとき、次の問い(問1～4)に答えよ。

問1 辺の長さはAB = $\sqrt{\boxed{\text{アイ}}}$、AC = $\boxed{\text{ウ}}$である。また、四面体OABCの体積は$\boxed{\text{エオ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$である。

問2 $\vec{x}$は$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$のそれぞれとなす角がともにθ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$であり、$|\vec{x}| = 1$である。このとき、実数$p$、$q$、$r$を用いて$\vec{x} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$とおくと、$\dfrac{p}{\cos\theta} = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$、$\dfrac{p}{r} = \dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$である。

問3 Sの半径は$\boxed{\text{シ}}$であり、$\overrightarrow{OE} = \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソ}}}\vec{a} + \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\vec{c}$と表される。

問4 $\overrightarrow{OQ} = \dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\vec{b}$である。また、四面体OABCの体積を$V_1$、四面体OPQRの体積を$V_2$とすると、$\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$である。

第３問　xy 平面において

$$\begin{cases} x = \sin 2\theta \\ y = \sin 3\theta \end{cases} \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

によって表される曲線をＣとする。このとき、次の問い（問１～４）に答えよ。

問１　Ｃ上の点をP(x, y) とする。x 座標が最大であるときの y 座標は $\dfrac{\sqrt{\boxed{ア}}}{\boxed{イ}}$ である。また、Ｃと x 軸の共有点のうち原点ではないものを点Ｑとすると、Ｑは $\theta = \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\pi$ に対応する点であり、Ｑにおける曲線Ｃの接線の方程式は $y = \boxed{オ}\,x - \dfrac{\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{ク}}$ である。

問２　$y^2 = \dfrac{\boxed{ケ} - \cos\boxed{コ}\,\theta}{\boxed{サ}}$、

$$y^2 \frac{dx}{d\theta} = \cos\boxed{シ}\,\theta - \frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\left(\cos\boxed{ソ}\,\theta + \cos\boxed{タ}\,\theta\right)$$

である。ただし、$\boxed{ソ} < \boxed{タ}$ とする。

問３　Ｃと直線 $y = x$ の共有点で原点でないものを点A(α, α) とすると、Aは $\theta = \dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}\pi$ に対応するＣ上の点であり、この値を θ_0 とおくと

$$\cos\theta_0 = \frac{\boxed{テ} + \sqrt{\boxed{ト}}}{\boxed{ナ}}$$ となる。また、

$$\alpha^2 = \frac{\boxed{ニ} + \sqrt{\boxed{ヌ}}}{\boxed{ネ}}$$ となる。

問4　Cと直線$y = x$で囲まれる部分をx軸の周りに回転して得られる立体の体積をVとする。aを問3の値とすると、

$$\frac{V}{a} = \frac{\boxed{\text{ノハ}} - \boxed{\text{ヒ}}\sqrt{\boxed{\text{フ}}}}{\boxed{\text{ヘホ}}}\pi$$となる。