

一般入試 数学

I ア , ケ の解答は該当する解答群の中から最も適当なものをそれぞれ1つずつ選べ.

3人の力士 A, B, C が下記 ^{ともえ} 巴戦のルールに従い相撲をとり、優勝者を決める

- 1回目の取り組みは力士 A と B が対戦する.
- n を 2 以上の自然数として, n 回目の取り組みは, $n - 1$ 回目の取り組みの勝者と, その取り組みに参加していなかった力士が対戦する.
- 2 連勝した力士を優勝とし, 優勝者が決定した時点で巴戦は終了とする.

1 回の取り組みで, 力士 A が B に勝つ確率は $\frac{1}{2}$, B が C に勝つ確率は p , C が A に勝つ確率は $1 - p$ であり, 相撲の勝負に引き分けはないものとして, 以下の問いに答えよ.

(a) 3 回目の取り組み終了時点で優勝者が決まらない場合, 4 回目の取り組みは ア である. 6 回目の取り組みで力士 C が優勝する確率は, $p = \frac{\text{イ}}{\text{ウ}}$ のとき最大値 $\frac{\text{エオ}}{\text{カキク}}$ をとる. 何回かの取り組みを行って力士 A が優勝する確率を α , 力士 B が優勝する確率を β とすると ケ .

(b) $p = \frac{1}{3}$ のとき, 3 回目の取り組みで力士 C が優勝する確率は $\frac{\text{コ}}{\text{サ}}$ であり, 何回かの取り組みを行って力士 C が優勝する確率は $\frac{\text{シ}}{\text{ス}}$ となる.

(c) 3 人の力士が優勝する確率が等しくなるのは $p = \frac{\text{セソ} - \sqrt{\text{タチ}}}{\text{ツテ}}$ のときである.

ア の解答群

- ① 必ず力士 A と B の対戦 ② 必ず力士 B と C の対戦 ③ 必ず力士 A と C の対戦
 ④ 力士 A が参加するが対戦相手は不定 ⑤ 力士 B が参加するが対戦相手は不定
 ⑥ 力士 C が参加するが対戦相手は不定 ⑦ どの力士同士の対戦となるか不定

ケ の解答群

- ① $\alpha < \beta$ が成り立つ ② $\alpha = \beta$ が成り立つ ③ $\alpha > \beta$ が成り立つ
 ④ $\alpha \leq \beta$ が成り立つ ⑤ $\alpha \geq \beta$ が成り立つ ⑥ $\alpha \neq \beta$ が成り立つ
 ⑦ p の値によって α, β の大小関係が変化する

II 座標空間において、点 $C(0, 0, 1)$ を中心とする半径 1 の球面を S 、点 $A(1, 0, 3)$ から球面 S に引いた接線の接点を $P(x, y, z)$ 、接線と xy 平面との交点を $Q(X, Y, 0)$ とする。

(a) 点 P は球面 S 上にあるので $x^2 + y^2 + (z - \boxed{\text{ア}})^2 = \boxed{\text{イ}}$ を満たし、

$\vec{CP} \cdot \vec{AP} = \boxed{\text{ウ}}$ であるので、次式が成り立つ。

$$x + \boxed{\text{エ}} z = \boxed{\text{オ}} \quad \dots \dots (*)$$

この式は平面を表す。この式が表す平面と球面 S との交線は、

点 $\left(\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}, \boxed{\text{ク}}, \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \right)$ を中心とする半径 $\frac{\boxed{\text{サ}} \sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ の円になる。

また、

$$|\vec{AP}| = \boxed{\text{セ}} \quad \dots \dots (**)$$

が成り立つ。

(b) 点 Q は直線 AP 上にあるため、 $\vec{AQ} = k\vec{AP}$ を満たす実数 k が存在するが、式(*)よりこの実数 k は

$$k = \frac{\boxed{\text{ソ}} - X}{\boxed{\text{タ}}}$$

と表されることがわかる。これと式(**)より、点 Q の座標に対して次式が成立する。

$$X^2 + \boxed{\text{チ}} X + \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} Y^2 = \boxed{\text{ト}}$$

この式が表す xy 平面上の楕円の焦点は、原点と点 $(\boxed{\text{ナニ}}, \boxed{\text{ヌ}}, 0)$ である。

Ⅲ 三角関数の極限に関する以下の問いに答えよ.

- (1) 定数 k に対して, 極限

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos 3\theta + k \cos 2\theta}{4 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 3}$$

が有限の値となるのは $k =$ のときであり, このとき極限値は である.

- (2) 正の実数 x に対して, 下記極限で定義される関数を $f(x)$ とする

$$f(x) = \lim_{a \rightarrow 2} \frac{\cos ax - \cos 2x}{a^2 + a - 6}$$

このとき, 関数 $f(x)$ は

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\text{オ}}{\text{キク}} \sqrt{\text{カ}} \pi, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{\text{ケコ}}{\text{サ}}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \frac{\text{シス}}{\text{セソ}}$$

を満たす.

また, $x > 0$ の範囲で $y = f(x)$ のグラフが直線 $y = ax + b$ と共有点を持たないのは,

$$a > \frac{\text{タ}}{\text{チ}} \text{ かつ } b > \text{ツ} \text{ を満たすとき, または } a < \frac{\text{テト}}{\text{ナ}} \text{ かつ } b < \text{ニ}$$

を満たすときである.

IV 座標平面上を運動する点 $P(x, y)$ の座標が, 時刻 t において

$$x = -\sqrt{3}t^2 + 2\sqrt{3}t, \quad y = t^3 - 3t^2 + 2t$$

であり, 時刻 t が $0 \leq t \leq 1$ の範囲で変化したときの点 P の軌跡を曲線 C とする

(a) 点 P の y 座標は $t = \frac{\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ のとき最大値 $\frac{\boxed{\text{エ}} \sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ をと

る. また, $0 < t < 1$ のとき, 点 P における曲線 C の接線と x 軸とのなす鋭角が $\frac{\pi}{6}$ となるのは

$t = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のときである.

(b) 時刻 t における点 P の速さは $\boxed{\text{ケ}} t^2 - \boxed{\text{コ}} t + \boxed{\text{サ}}$ と表される. また, 曲線 C の長さは $\boxed{\text{シ}}$ である.

(c) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積は $\frac{\boxed{\text{ス}} \sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ である.