(K—48—M)

平成30年度入学試験問題

数　　学

I　注　意　事　項

1. 指示があるまでこの冊子の中を見てはいけません。
2. この冊子は全部で，5ページです。**設問はⅠからⅣまで**あります。
3. 解答用紙のマーク数字は，次の「良い例」のように，濃く正しく塗りつぶしなさい。**正しく塗りつぶされていない場合，採点できないことがあります。**

   良い例………●

   悪い例……… 

4. 解答用紙には解答欄の他に次の記入欄があるので，正確に記入しなさい。
   ①　氏名欄……………………氏名を**漢字**と**フリガナ**で記入しなさい。
   ②　受験番号欄………………6桁の受験番号を**算用数字**で記入し，**マーク欄の数字**を正しく塗りつぶしなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気がついた場合は，手を上げて申し出なさい。
6. 試験中に質問がある場合は，手を上げて申し出なさい。
7. 試験終了後，この問題冊子は持ち帰りなさい。
8. 途中退場は認めません。

Ⅱ　解答上の注意

解答上の注意が裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，冊子を開いてはいけません。

Ⅱ　解答上の注意

1　問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$ ，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がないかぎり，数字(0 ～ 9)，または負の符号(－)が入ります。ア，イ，ウ，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア，イ，ウ，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例 1　$\boxed{\text{アイ}}$ に－8と答えたいとき

ア	⊖	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
イ	⊖	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

2　分数形で解答する場合は，既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。負の符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例 2　$\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として

ウ	⊖	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
エ	⊖	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
オ	⊖	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

3　根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$，$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$，$\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ に $2\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，$6\sqrt{2}$ と答えるところを，$1\sqrt{8}$，$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$，$3\sqrt{8}$ のように答えてはいけません。

問題は次のページから始まります。

Ⅰ　次のように定義される２つの数列を$\{a_n\}$，$\{b_n\}$とする．

$$a_1 = 1,\ b_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n - b_n,\ b_{n+1} = 4a_n + 7b_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(a)　$a_2 = \boxed{\text{ア}}$ であり，数列$\{a_n\}$は自然数nに対し次式を満たす．

$a_{n+2} - pa_{n+1} = p(a_{n+1} - pa_n)$，ただし $p = \boxed{\text{イ}}$．

したがって，数列$\{a_{n+1} - pa_n\}$は，公比 $\boxed{\text{ウ}}$ の等比数列であり，

$$a_{n+1} - pa_n = \boxed{\text{エオ}} \times \boxed{\text{カ}}^{\,n-1} \qquad \cdots\cdots\cdots(*)$$

が成り立つ．

(b)　式$(*)$の両辺をp^{n+1}で割ると，数列$\left\{\dfrac{a_n}{p^n}\right\}$の階差数列が定数$\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$となることがわかる．これより，数列$\{a_n\}$の一般項は，

$$a_n = \left(\boxed{\text{サシ}}\,n + \boxed{\text{ス}}\right) \times \boxed{\text{セ}}^{\,n-2}$$

と求められる．

(c)　２つの数列を用いて表される極限値，および無限級数の和について，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チ}}},\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2a_n + b_n} = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$$

が成立する．

Ⅱ　一辺の長さが6で，座標空間内の原点Oを重心とする正三角形ABCがxy平面内にあり，これと合同な正三角形によって囲まれた，図1のような正八面体ABC–DEFが$z \geqq 0$の領域にある．点Aはx軸上$x > 0$の領域にあり，三角形DEFの重心はz軸上に存在する．辺BCの中点をM，$0 < t < 1$を満たす実数tに対して，辺ADを$t : 1-t$に内分する点をPとして，以下の問いに答えよ．

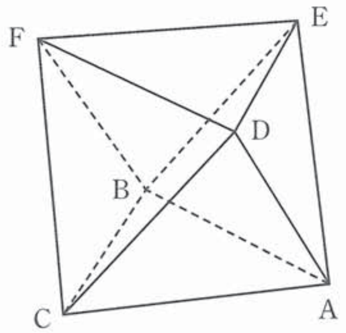

図1

(a)　点Aのx座標は $\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$，点Dの$z$座標は $\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}$ である．

(b)　$\overrightarrow{MF} = \left(\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}},\ 0,\ \boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}\right)$ である．

正八面体の一辺を共有する隣あう2つの面のなす角をθとすると，$\cos\theta = \dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サ}}$ が成り立つ．

(c)　点Pを通りxy平面に平行な平面で正八面体を切ったとき，断面の図形は，周の長さが $\boxed{シス}$ である $\boxed{セ}$ 角形となる．

tを$0 < t < 1$の範囲で変化させると，$t = \dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$ のとき，この断面の面積が最大値 $\dfrac{\boxed{チツ}}{\boxed{テ}}\sqrt{\boxed{ト}}$ をとり，断面の外接円の半径が $\boxed{ナ}$ となる．

Ⅲ　x を実数，$f(x) = |\,x^2 - x - 6\,|$ として，以下の問いに答えよ．

(a)　不等式 $f(x) > 2x + 6$ の解は

$$x < \frac{\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}},\quad \boxed{\text{オカ}} < x < \boxed{\text{キ}},$$

$$\frac{\boxed{\text{ア}} + \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}} < x$$

である．

(b)　方程式 $f(x) = 2x + k$ が異なる3つの実数解を持つように，定数 k の値を求めると，

$k = \boxed{\text{ク}}$ または $\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ となる．

(c)　区間 $-3 < x < 4$ において，$y = \sin(f(x))$ のグラフには，極大となる点が $\boxed{\text{シ}}$ 個存在する．これらの点のうち，極大値が1未満となるのは，$x = \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ のときである．

Ⅳ　実数 x に対して，$f(x)$ は，$x \neq 0$ のとき $f(x) = -|x|\log_e|x|$ であり，$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$ を満たす関数として定義する．必要があれば $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\log_e x}{x} = 0$ を用いてよい．

(a)　$f(0) = \boxed{\text{ア}}$ である．

(b)　$f(x)$ の最大値を α，$f(x)$ の最大値を与える x の値を β とすると，$\log_e \alpha = \boxed{\text{イウ}}$，$\log_e|\beta| = \boxed{\text{エオ}}$ が成り立つ．

(c)　$t \neq 0$ を満たす実数 t に対し，点 $(t,\ f(t))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線を考える．接線が点 $(-1,\ 1)$ を通るとき，接点の x 座標 t は，

$$t + \log_e|t| = \boxed{\text{カ}} \text{ または } \boxed{\text{キク}}$$

を満たし，このような接線は $\boxed{\text{ケ}}$ 本存在する．

(d)　$0 < k < |\beta|$ を満たす定数 k に対し，$x \geqq k$ の領域において直線 $x = k$，曲線 $y = f(x)$ および x 軸によって囲まれる図形の面積を $S(k)$，この図形を y 軸の回りに 1 回転してできる立体の体積を $V(k)$ とすると，

$$\lim_{k \to 0} S(k) = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}},\quad \lim_{k \to 0} V(k) = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\pi$$

が成り立つ．