

# 数 学 (その1)

1 次の各問に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

- (1)  $x$  の関数  $f(x)$ ,  $g(x)$  をそれぞれ  $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ ,  $g(x) = x^2 + 2x + a$  とする。ただし、 $a$  は定数とする。
- (1-1)  $g(x) < f(x)$  を満たす実数  $x$  が区間  $-2 \leq x \leq 2$  に存在するような、定数  $a$  の値の範囲を求めよ。
- (1-2)  $g(x_1) < f(x_2)$  を満たす実数  $x_1$  および  $x_2$  が区間  $-2 \leq x \leq 2$  に存在するような、定数  $a$  の値の範囲を求めよ。
- (2) 白球 4 個と黒球  $n$  個が入った袋から同時に 2 個の球を取り出すとき、2 個の球が同色である確率を  $p_n$  とする。ただし、球はすべて同じ確率で取り出されるものとする。
- (2-1)  $n = 3$  のとき、 $p_n$  の値を求めよ。
- (2-2)  $n \geq 2$  とする。このとき、 $p_n \geq \frac{1}{2}$  となる整数  $n$  の最小値を求めよ。
- (3)  $0 \leq x < 2\pi$  のとき、不等式  $\sin x + \sqrt{3} \cos x \geq \sqrt{2}$  を解け。
- (4)  $\log_{10} 2 = 0.3010$ ,  $\log_{10} 3 = 0.4771$  とする。 $6^{100}$  の桁数を求めよ。

2 正の整数  $a, b$  の組  $(a, b)$  の全体を

$(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), \dots$

のように 1 列に並べる。ここで、2 つの組  $(a_i, b_i) (i = 1, 2)$  について、 $a_1 + b_1 < a_2 + b_2$  ならば  $(a_1, b_1)$  の方を先に並べ、また、 $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$  ならば、 $a_1 < a_2$  のとき  $(a_1, b_1)$  の方を先に並べるものとする。次の各問に答えよ。ただし、(1) から (3) までは、答は結果のみを解答欄に記入せよ。なお、必要ならば公式

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$$

を使ってよい。

- (1) 組  $(5, 5)$  は初めから何番目にあるか。
- (2)  $m, n$  を正の整数とする。組  $(m, n)$  は初めから何番目にあるか。
- (3) 初めから 200 番目にある組を求めよ。
- (4) 初めから  $n$  番目の組が  $(a, b)$  であるとき、 $c_n = ab$  とおく。和  $c_1 + \dots + c_{200}$  を求めよ。

## 数 学 (その2)

**3** 次の各問に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 空間に3点  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(2, -1, 4)$ がある。次の問に答えよ。

(1-1)  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  の内積  $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$  を求めよ。

(1-2)  $\cos \angle AOB$  の値を求めよ。

(1-3)  $\triangle OAB$  の面積を求めよ。

(2)  $(2x^3 - \frac{1}{3x})^9$  の展開式における  $\frac{1}{x}$  の係数を求めよ。

(3) 実数全体で定義された関数  $f(x) = \frac{x^4 + 5x^2 + 11}{x^2 + 2}$  の最小値を求めよ。

(4) 曲線  $y = \sqrt{2 + |4x - 2x^2|}$  と直線  $y = m(x + 3)$  が相異なる4個の交点をもつような定数  $m$  の値の範囲を求めよ。

**4** 次の各問に答えよ。ただし、(1)の答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 次の問に答えよ。

(1-1)  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$  の値を求めよ。

(1-2) 極限值  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+3 \cdot 1}{n^2+1^2} + \frac{n+3 \cdot 2}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n+3 \cdot n}{n^2+n^2} \right)$  を求めよ。

(2)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{a + \cos x} - b}{(x - \pi)^2} = \frac{1}{8}$  となるような定数  $a, b$  を求めよ。