

数 学 (その1)

1 次の各問に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

- (1) 不等式 $x^2 + 2ax + 2a \leq 0 \cdots \textcircled{1}$ および $2x^2 - x - 1 \leq 0 \cdots \textcircled{2}$ がある。ただし、 a は定数である。
- (1-1) 不等式 $\textcircled{2}$ を満たす実数 x がすべて不等式 $\textcircled{1}$ を満たすような a の値の範囲を求めよ。
- (1-2) 不等式 $\textcircled{1}$ を満たす実数 x が存在し、それらがすべて不等式 $\textcircled{2}$ を満たすような a の値の範囲を求めよ。
- (2) 当たり 2 本、はずれ n 本の入ったくじがある。ただし、 $n \geq 2$ とし、一度引いたくじはもとに戻さないものとする。
- (2-1) このくじを 1 本引き、はずれたときはもう 1 本だけ引いて終わりとする。このとき、当たりを引く確率を求めよ。
- (2-2) このくじを A, B 2 人が順番に引く。まず A の番のとき、A は 1 本引き、はずれたときはもう 1 本だけ引いて終わりとする。次に B の番のとき、もしも A が当たっていれば B は引けないとする。A がはずれているときには B は 1 本引き、それがはずれたときはもう 1 本だけ引いて終わりとする。このように決めたとき、B が当たりを引く確率を求めよ。
- (3) $\{a_n\} (n = 1, 2, 3, \dots)$ は自然数 m を m 個ずつ小さい値から並べてできる数列 $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, \dots$ である。
- (3-1) $a_n = 100$ となる最小の n の値を求めよ。
- (3-2) a_{100} の値を求めよ。

2

連立不等式 $a \leq y \leq x \leq a + b$ により表される領域を D 、不等式 $x^2 \leq 10y$ により表される領域を E とする。ここで、 a, b は定数で、 $b \geq 0$ とする。なお、不等式により表される点の集まりがただ 1 点だけになった場合も領域とみなすものとする。次の各問に答えよ。ただし、(1), (2), (3) の答は結果のみを解答欄に記入せよ。

- (1) 適当な $b \geq 0$ をとると D が E に含まれるようにできる実数 a の値の範囲を求めよ。
- (2) a は(1)で求めた範囲の数とし、 D が E に含まれるとする。このとき、 b の値の範囲を a を用いて表せ。
- (3) a は(1)で求めた範囲の数、 D が E に含まれるとし、領域 D の面積のとり得る値の最大値を $S(a)$ とする。このとき、 $S(a)$ を a を用いて表せ。
- (4) a は(1)で求めた範囲を変わるとする。このとき、(3)の $S(a)$ の最大値と、そのときの a の値を求めよ。

数 学 (その2)

3 次の各問に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

- (1) $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{4}$ のとき $\sin \theta$ の値を求めよ。
- (2) 3 角形の 3 辺の長さを a, b, c , 面積を S , 外接円の半径を R とするとき, R を a, b, c および S を用いて表せ。
- (3) $\log_5 3 = a, \log_{10} 24 = b$ とおくとき, $\log_2 5$ を a, b を用いて表せ。
- (4) x^{2015} を $x^2 - 3x + 2$ で割ったときの余りを求めよ。
- (5) 3 角形 ABC の外心を O , 外接円の半径を 1 とする。 $5\vec{OA} + 6\vec{OB} + 7\vec{OC} = \vec{0}$ のとき, 辺 AB の長さを求めよ。

4 次の各問に答えよ。ただし、(1)、(2)の答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) $0 \leq x \leq 2\pi$ のとき、 $\int_0^x t(\sin x - \sin t) dt = k$ の解の個数が 3 個となるような定数 k の値の範囲を求めよ。

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x \cos^3 x dx$ を求めよ。

(3) $f(x) = x^3 + \int_0^1 (x - 2t)f(t) dt$ を満たす 3 次式 $f(x)$ を求めよ。