

数 学 (その1)

1 次の各問に答えよ。ただし、(1)(2)については答は結果のみを解答欄に記入せよ。

また、 $10!$ 、 $9!$ のような大きな数の階乗や累乗は、値を計算せずに $a!$ や a^m のような表記でもよい。

(1) 中身が見えない袋の中に、1個の赤玉と9個の白玉が入っている。この袋の中から玉を1つ取り出して色を確認し、またもとに戻すという試行を10回繰り返すとする。このとき、赤玉が8個出る確率を求めよ。

(2) 中身が見えない袋の中に、1個の赤玉と $n-1$ 個の白玉が入っている。この袋の中から玉を1つ取り出して色を確認し、またもとに戻すという試行を n 回繰り返すとする。このとき、赤玉が8個出る確率を P_n とする。 P_n を n の式で表せ。ただし、 $n \geq 8$ とする。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ の値を求めよ。

2

次の各問に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

- (1) 空間のベクトル \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} が与えられているとする。これらを用いて、次のようにベクトル \vec{d} , \vec{e} を定義する。ここで、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ はベクトル \vec{a} , \vec{b} の内積を表すものとする。

$$\vec{d} = \vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}, \quad \vec{e} = \vec{c} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|^2} \vec{a} - \frac{\vec{d} \cdot \vec{c}}{|\vec{d}|^2} \vec{d}$$

(1-1) $\vec{a} \cdot \vec{d}$ の値を求めよ。

(1-2) $\vec{e} \cdot \vec{d}$ の値を求めよ。

- (2) 複素数 $\alpha = 1 + i$, $\beta = 3 - 7i$, $\gamma = -1 - 2i$ を表す複素数平面上の点をそれぞれ A, B, C とする。平行四辺形 ABCD の頂点 D を表す複素数を求めよ。ここで、 i は虚数単位を表すものとする。

- (3) 次のような数列がある。

$$1, 11, 111, 1111, 11111, \dots$$

(3-1) この数列の第 k 項を求めよ。

(3-2) この数列の初項から第 n 項までの和を n の式で表わせ。

数 学 (その2)

3 次の各問に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 2016 の正の約数について次の問に答えよ。

(1-1) 約数は全部でいくつあるか。

(1-2) (1-1)の約数の総和を求めよ。

(2) $a > 0$, $b > 0$ のとき, $\log_3(a + \frac{3}{b}) + \log_3(b + \frac{3}{a})$ の最小値を求めよ。

(3) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{2}{3}$ のとき, $\cos^3 \theta - \sin^3 \theta$ の値を求めよ。ただし, $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ とする。

(4) 次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^{\pi} |\sin 3x + \sin 2x + \sin x| dx$$

4 次の各問に答えよ。ただし、(1)に関しては、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 次の問に答えよ。

(1-1) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ とする。このとき、2曲線 $y = \sin x$, $y = \cos x$ と直線 $y = 1$ とで囲まれた部分の図形の面積 S を求めよ。

(1-2) (1-1)の図形を直線 $y = 1$ のまわりに回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

(2) 放物線 $y = x^2 - 2$ 上を動く点 P がある。動点 P と点 $(1, 0)$ との距離が最小になるときの点 P の座標を求めよ。