

数 学 (その1)

1 次の各問に答えよ。ただし、(1)(2)に関しては答は結果のみ解答欄に記入せよ。

複素数平面上に原点を中心とした単位円がある。この円周上に点 A, B, C, D, E を反時計回りに順に等間隔になるように取り、点 A は実軸上の正の部分に定めるとする。また、複素数 α を表す点を B とする。ただし、例えば $x = \sin \frac{\pi}{3}$ であれば $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ というように、答に三角関数を含む場合は、三角関数の形ではなくその値を書くこと。

- (1) $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ の値を求めよ。
- (2) $|\alpha - 1|$ の値を求めよ。
- (3) $\sin \frac{\pi}{5}$ の値を求めよ。

2 次の各問に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 裏が出る確率が表の出る確率の2倍であるように細工されたコインがある。このコインを1回投げて、表が出たら300円もらえ、裏が出たら100円支払うというゲームを考える。ただし、1回コインを投げるごとに40円支払うものとする。A君は、所持金400円でこのゲームに参加することにした。ゲームが5回終了した時点でA君の所持金が初めの3倍以上になる確率を求めよ。

(2) x 軸上の区間 $[0, 1]$ を n 等分点する点を順に $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, \dots, x_k = \frac{k}{n}, \dots, x_n = 1$ とする。この区間において $y = x^2$ 上に、 $n + 1$ 個の点を $y_k = (x_k)^2$ となるように定めるとする。

(2-1) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{y_{k-1} + y_k}{2n}$ を n の式で表せ。

(2-2) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

数 学 (その2)

3 次の各問に答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき次の値を求めよ。

(1-1) $\sin \theta \cos \theta$

(1-2) $\tan^3 \theta + \frac{1}{\tan^3 \theta}$

(2) 任意の正の定数 a に対して、関係 $\frac{a}{x} + \frac{1}{y} = 1$ が成り立っているとする。この条件のもとで、 $x > 0$ 、 $y > 0$ のとき、 $x + y$ の最小値を a を用いて表せ。

(3) 次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^{\pi} |\cos x - \cos 2x| dx$$

(4) 点 $(1, 3)$ を通る直線の方程式を $y = f(x)$ とするとき、次の定積分の値を最小にするように $f(x)$ を定めよ。

$$\int_0^2 \{x^2 - f(x)\}^2 dx$$

4 次の各問に答えよ。ただし、(1)に関しては、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 2つの曲線 $y = 2 \sin^2 x (0 \leq x \leq \pi)$, $y = \cos 2x (0 \leq x \leq \pi)$ について次の問に答えよ。

(1-1) 2つの曲線の交点の座標を求めよ。

(1-2) 2つの曲線によって囲まれる図形の面積を求めよ。

(2) 実数 x, y に対して、次の関係式が成り立つとする。このとき、 x, y の値を求めよ。

$$\log_x y = \log_y x = -\log_3(x + y)$$