

# 数 学 (その1)

1 次の各問いに答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) A さん, B さんは仲の良い友達である。イベントに二人を誘うとき, A さんが来る確率は 0.5, B さんが来る確率は 0.6 であるという。また, A さんが来るという条件の下で B さんが来る確率は 0.9 であるという。

(1-1) A さん, B さんが 2 人とも来る確率を求めよ。

(1-2) A さん, B さんの少なくとも 1 人が来る確率を求めよ。

(1-3) B さんが来るという条件の下で A さんが来る確率を求めよ。

(2) 空間内に 2 定点 A, B があり, 原点 O とで三角形をなすとする。空間にある点 P が

$$\vec{OP} \cdot \vec{AP} + \vec{AP} \cdot \vec{BP} + \vec{BP} \cdot \vec{OP} = 0$$

を満たしているとき, 動点 P の存在範囲を求め, どのような図形になるか答えよ。

2 次の問いに答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) ド・モアブルの定理より、 $(\cos \theta + i \sin \theta)^5 = \cos 5\theta + i \sin 5\theta$  が成り立つ。

この等式の虚数部分を比較することによって、 $\frac{\sin 5\theta}{\sin \theta}$  を  $\cos \theta$  の式で表せ。

ただし、答は実数係数の範囲で因数分解した形で答えよ。

(2) (1)の結果を用いて、次の式の値を求めよ。

$$\left(1 - \cos \frac{\pi}{5}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi}{5}\right) \left(1 - \cos \frac{3\pi}{5}\right) \left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right)$$

(3) ド・モアブルの定理より、 $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$  が成り立つ。

この等式の虚数部分を比較することによって、 $\frac{\sin n\theta}{\sin \theta}$  を  $\cos \theta$  の式で表せ。ただし、答は実数係数の範囲で因数分解した形で答えよ。

(4) (3)の結果を用いて次の式の値を  $n$  の式で簡潔に表せ。

$$\underbrace{\left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right) \cdots \left(1 - \cos \frac{(n-1)\pi}{n}\right)}_{n-1 \text{ 項の積}}$$

## 数 学 (その2)

3 次の各問いに答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) 2つの自然数  $A, B$  について  $[A * B]$  は  $A, B$  のうち大きい方の数を小さい方の数で除した余りを表す。例えば  $[19 * 8] = 3$  となる。ただし、 $A = B$  のときは  $[A * B] = 0$  とする。

(1-1)  $[N_1 * 41] = 5$  となる 100 以下の自然数  $N_1$  は全部で何個あるか求めよ。

(1-2)  $[N_2 * 48] = [N_2 * 84]$  となる 2017 以下の自然数  $N_2$  は全部で何個あるか求めよ。

(2) 正十二面体の辺の数を求めよ。なお、正十二面体の頂点の数は 20 である。

(3) 2次方程式  $x^2 - (t - 7)x + 1 = 0$  の2つの解を  $\alpha, \beta$  とするとき

$$(1 - t\alpha + \alpha^2)(1 - t\beta + \beta^2)$$

の値を求めよ。

4 次の各問いに答えよ。ただし、答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)  $\sin \theta + \sin^2 \theta = 1$  のとき  $\cos^2 \theta + \cos^8 \theta$  の値を求めよ。

(2)  $(\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 = \frac{9}{5}$  のとき、 $x^2 y$  の取りうる範囲を求めよ。

(3) 関数

$$f(x) = \frac{e^x}{\sin x}$$

の  $0 < x < \pi$  における最小値を求めよ。

(4)  $0 < k < 2$  であるとき、 $y = -x^2 + 2x$  と  $y = kx$  とで囲まれる図形の面積を  $S_1$ 、

$y = -x^2 + 2x$  と  $y = kx$  と  $x = 2$  とで囲まれる図形の面積を  $S_2$  とするとき、 $S_1 + S_2$  を最小にする  $k$  の値を求めよ。

(5) 整式  $f(x)$  が

$$f(0) = 0, \quad xf(x) + \int_x^0 f(t) dt = 9x^4 - 6x^2$$

を満たしている。このとき  $x$  軸と  $y = f(x)$  のグラフとで囲まれる部分の面積を求めよ。