

# 数 学

< 監督者の指示があるまで開いてはいけない >

1. 試験開始後、まず解答用紙に自分の受験番号と氏名を正しく記入しなさい。
2. 試験開始後、速やかに問題冊子に落丁や乱丁がないか確認しなさい。  
落丁や乱丁があった場合は、手を挙げなさい。
3. 解答用紙に印刷されていない問いの番号は各自で記入しなさい。
4. 下書きは問題冊子の余白を利用しなさい。
5. 問題冊子は試験終了後、持ち帰ってもよい。  
ただし、試験途中では持ち出してはいけない。

1. 次の  にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

- (1) 1 から 4 までの番号をつけた 4 個の箱と、1 から 4 までの番号をつけた 4 枚のカードがある。最初は、1, 3 番の箱に赤玉が 1 個ずつ、2, 4 番の箱に白玉が 1 個ずつ入っている。4 枚のカードから同時に 2 枚を取り出し、取り出したカードの番号と同じ番号の 2 つの箱に入っている玉を入れかえた後、カードをもとに戻す。この試行を 2 回繰り返すとき、1, 3 番の箱に赤玉、2, 4 番の箱に白玉が入っている確率は  であり、1, 2 番の箱に赤玉、3, 4 番の箱に白玉が入っている確率は  である。
- (2) 複素数  $z = \cos \theta + i \sin \theta + \sqrt{3}(i \cos \theta - \sin \theta)$  において、 $\theta$  が  $0 \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi$  の範囲を動くとき、 $|\sqrt{2}z - 1 + i|$  の最大値は  である。ただし、 $i$  は虚数単位とする。

2.  $xy$  平面上において、半径 2 の円板が  $x$  軸に接しながら正の方向にすべることなく回転するとき、円板上の定点  $P$  が描く曲線  $C_1$  を考える。時刻  $t = 0$  における円板の中心  $D$  の位置を点  $(0, 2)$ 、 $P$  の位置を点  $(0, 1)$  とする。時刻  $t$  において  $D$  が点  $(t, 2)$  の位置にあるように円板が回転していくとき、次の問いに答えよ。問い (1)(i) では  にあてはまる適切な式を解答欄に記入せよ。

(1) (i) 時刻  $t$  における  $P$  の座標  $(x, y)$  を  $t$  を用いて表すと、 $(x, y) = (\text{工}, \text{オ})$  である。

(ii)  $x, y$  の  $t$  に関する増減をそれぞれ調べよ。

(2) 時刻  $t$  に対応する点  $P(x, y)$  における  $C_1$  の法線  $l$  が  $x$  軸と交わる点を  $M$  とし、 $M$  が線分  $PQ$  の中点となるような  $l$  上の点を  $Q$  とおく。 $Q$  の座標を  $t$  を用いて表せ。ただし、 $t = 0$  のときは  $Q$  を点  $(0, -1)$  とする。

(3) 点  $Q$  が描く曲線を  $C_2$  とする。2 曲線  $C_1, C_2$  と  $y$  軸、および  $t = 3\pi$  のときの (2) における法線  $l$  で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

3.  $a$  を 3 以上の奇数の定数とする。方程式  $ax - 2y = 1$  をみたす自然数の組  $(x, y)$  について、次の問いに答えよ。

(1) 組  $(x, y)$  は無数に存在することを示せ。

(2) 組  $(x, y)$  の列  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), \dots$  が、条件「 $n \geq 2$  について  $x_n$  は、 $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  のどの項とも異なる」をみたすとする。このとき、極限值

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} + \dots + \frac{y_n}{x_n} \right)$  を  $a$  を用いて表せ。必要ならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$  を利用してよい。

4. 正四面体 ABCD があり, 三角形 ABD 上に  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$  をみたす点 P をとる。三角形 ACD の重心を G, 直線 GP と平面 ABC の交点を Q とする。線分 AB 上の点 R を, 三角形 PQR が PQ を斜辺とする直角三角形となるようにとるとき, 線分 AR, AB の長さの比の値  $\frac{AR}{AB}$  を求めよ。