

数 学

< 監督者の指示があるまで開いてはいけない >

1. 試験開始後、まず解答用紙に自分の受験番号と氏名を正しく記入しなさい。
2. 試験開始後、速やかに問題冊子に落丁や乱丁がないか確認しなさい。
落丁や乱丁があった場合は、手を挙げなさい。
3. 解答用紙に印刷されていない問いの番号は各自で記入しなさい。
4. 下書きは問題冊子の余白を利用しなさい。
5. 問題冊子は試験終了後、持ち帰ってもよい。
ただし、試験途中では持ち出してはいけない。

1. 次の にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

(1) 大, 中, 小 3 個のさいころを同時に投げるとき, それぞれのさいころの出る目を a, b, c とする。出る目に応じて, 得点を次のように定める。

・ $a + b < c$ のとき, 得点を $(a + b + c)$ 点とする。

・ $a + b \geq c$ のとき, 得点を $2(a + b + c)$ 点とする。

このとき, 得点が 5 点となる確率は (ア) であり, 得点が 8 点以下となる確率は (イ) である。

(2) $\triangle ABC$ に半径 2 の円が内接し, $\cos \angle ABC = \frac{3}{5}$, $\cos \angle BCA = \frac{5}{13}$ のとき, 辺 BC の長さは (ウ) であり, $\triangle ABC$ の面積は (エ) である。

2. m は定数で, $m > 1$ とする。関数 $f(x) = \int_x^{mx} \frac{|t-e|}{t} dt$ ($x > 0$) について, 次の問いに答えよ。ただし, e は自然対数の底である。

- (1) $f(x)$ を求めよ。また, $f(x)$ が最小値をとる x の値を a とするとき, a を m を用いて表せ。
- (2) a を (1) で求めた値とする。曲線 $y = f(x)$ とその曲線上の点 $(e, f(e))$ における接線, および直線 $x = a$ で囲まれた部分の面積を $S(m)$ とするとき, 極限 $\lim_{m \rightarrow \infty} S(m)$ を求めよ。必要ならば $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ を用いてよい。

3. 定数 p は素数とし, 条件

$$a(ab - p^2) = c^2, \quad b \leq 2c$$

をみたす自然数の組 (a, b, c) を考える。 a が素数であるとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 自然数の組 (a, b, c) の個数を, p を用いて表せ。
- (2) a, b, c の最大公約数が 1 となるような自然数の組 (a, b, c) の個数を, p を用いて表せ。

4. 複素数平面上の3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ は正三角形 ABC をなし, $\alpha\beta\gamma = -1$ をみたしている。 $\triangle ABC$ の重心 $D(\delta)$ が実軸上にあり $\delta > -1$ であるとき, 次の問いに答えよ。ただし, 複素数平面上で複素数 z を表す点 P を $P(z)$ と書く。

(1) $\triangle ABC$ の外接円の半径 l を δ の式で表せ。

(2) α, β, γ を δ の式でそれぞれ表せ。ただし, $-\pi \leq \arg \alpha < \arg \beta < \arg \gamma < \pi$ とする。
ここで $\arg z$ は複素数 z の偏角を表す。