

数 学

〈監督者の指示があるまで開いてはいけない〉

1. 試験開始後、まず解答用紙に自分の受験番号と氏名を正しく記入しなさい。
2. 試験開始後、速やかに問題冊子に落丁や乱丁がないか確認しなさい。
落丁や乱丁があった場合は、手を挙げなさい。
3. 解答用紙に印刷されていない問いの番号は各自で記入しなさい。
4. 下書きは問題冊子の余白を利用しなさい。
5. 問題冊子は試験終了後、持ち帰ってもよい。
ただし、試験途中では持ち出してはいけない。

1. 次の にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

- (1) 1の数字が書かれたカードが1枚, 2の数字が書かれたカードが2枚, 3の数字が書かれたカードが3枚, 4の数字が書かれたカードが4枚の合計10枚のカードがある。カードをよく混ぜて, 1枚ずつ3枚のカードを取り出し, 取り出した順に左から並べて3桁の整数 N をつくる。このとき, N が3の倍数である確率は (ア) , 6の倍数である確率は (イ) である。
- (2) 実数 x, y が $|2x+y| + |2x-y| = 4$ をみたすとき, $2x^2+xy-y^2$ のとり得る値の範囲は (ウ) $\leq 2x^2+xy-y^2 \leq$ (エ) である。

2. n は自然数とし, 微分可能な関数 $f_n(x)$ は等式 $f_n(x) = e^{-x}x^{n+1} + \int_0^x e^{-t}f_n(x-t)dt$ をみたすとする。このとき, 次の問いに答えよ。ただし, e は自然対数の底である。

(1) $\frac{d}{dx}f_n(x)$ を求めよ。

(2) m は 2 以上の自然数とする。 $x > 0$ のとき, 不等式 $e^{-x}x^m \leq e^{-m}m^m$ が成り立つことを示せ。

(3) 極限值 $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x)$ を求めよ。

3. 自然数 n に対して, 整式 $f_n(x)$ を次のように定める。

$$f_1(x) = x^2 + x - \frac{1}{4}$$

$$f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x)) \quad (n \geq 2)$$

$f_n(x)$ を x^2 で割ったときの余りを $a_n x + b_n$ とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) a_2, b_2 の値を求めよ。

(2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

4. O を原点とする座標空間内に、定点 $A(4, 0, 0)$ と 3 点 $P(4 \cos \theta, 2\sqrt{2} \sin \theta, 2\sqrt{2} \sin \theta)$, $Q(4 \cos \theta, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta)$, R があり、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ かつ $\overrightarrow{OR} = 4 \frac{\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OQ}|}$ をみたしている。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、 $|\overrightarrow{PR}|$ の最大値と、そのときの $\cos \theta$ の値を求めよ。
- (2) $|\overrightarrow{PR}|$ が最大となるときを考える。 O を端点とし線分 PR の中点を通る半直線上に、点 M を $|\overrightarrow{OM}| = 4$ となるようにとるとき、 $\triangle MOA$ の面積を求めよ。