数　　学

1～10ページ（問題は1, 3, 5, 7, 9ページにあります。）

注　意

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答時間は**75分間**です。
3. 解答用紙は**マークシート解答用紙1枚**と**記述式問題解答用紙1枚**の合計**2枚**です。
4. マークシート解答用紙の記入にあたっては，**解答用紙の注意事項**を参照し，HBの鉛筆を使用して丁寧にマークしなさい。
5. 受験番号，氏名，フリガナを**マークシート解答用紙**に記入しなさい。受験番号は記入例を参照して，正しくマークしなさい。
6. 受験番号を，**記述式問題解答用紙**の所定欄に記入しなさい。
7. マークの訂正には，消しゴムを用い，消しくずは丁寧に取り除きなさい。
8. 試験開始後，ただちにページ数を確認し，落丁や印刷の不鮮明なものがあれば申し出なさい。
9. 試験終了後，**解答用紙2枚を提出しなさい**。問題冊子は**持ち帰りなさい**。
10. マークシート解答用紙は折り曲げないようにしなさい。

マークシート解答用紙の受験番号記入例

数字の位置	受験番号				
	万	千	百	十	一
	1	*2*	*3*	*4*	*5*
0	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
1	●	①	①	①	①
2	②	●	②	②	②
3	③	③	●	③	③
4	④	④	④	●	④
5	⑤	⑤	⑤	⑤	●
6	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
7	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
8	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
9	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

問題 [1]，[2]，[3] は，マークシートに解答を記入しなさい．ただし，分数は既約分数で答え，平方根を含む解答は平方根の中をできるだけ簡単にして答えなさい．問題[4]，[5] は，「数学記述式問題解答用紙」に解答しなさい．

[1]

(1)　a，b を定数とする．ただし $a > 0$ とする．2 次関数 $y = ax^2 + 6ax + b$ の定義域が $-5 \leqq x \leqq 2$ のとき，値域は $-\dfrac{25}{8} \leqq y \leqq \dfrac{25}{2}$ であるという．
このとき $a = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$, $b = \dfrac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$ である．

(2)　a，b を実数とする．3 次方程式 $ax^3 + bx^2 + 25x - 8a = 0$ が $x = 1 + \sqrt{2}\,i$ を解にもつとき，$a = \boxed{5}$, $b = -\boxed{6\,|\,7}$ である．ただし，i は虚数単位である．

(3)　1 辺の長さが 4 の立方体 ABCD − EFGH の辺 AB を 1 : 3 に内分する点を P，辺 BF の中点を Q，辺 BC を 3 : 1 に内分する点を R とする．
このとき，$\mathrm{PQ} = \sqrt{\boxed{8\,|\,9}}$, $\mathrm{RP} = \boxed{10}\sqrt{\boxed{11}}$ であり，三角形 PQR の面積は $\dfrac{\boxed{12}}{\boxed{13}}\sqrt{\boxed{14\,|\,15}}$ である．

(4)　さいころを 3 回投げて出た目を順に x，y，z とするとき，100 の位を x，10 の位を y，1 の位を z として 3 桁の自然数をつくる．ただし，さいころを投げる試行は互いに独立であるとする．こうしてつくった 3 桁の自然数が 4 の倍数になる確率は $\dfrac{\boxed{16}}{\boxed{17}}$ であり，4 の倍数かつ 9 の倍数になる確率は $\dfrac{\boxed{18}}{\boxed{19\,|\,20}}$ である．

計算用余白

[2]

(1) 2つの実数 x, y が $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ を満たしながら動くとき,

$y-\dfrac{1}{\sqrt{2}}x$ の最大値は $\boxed{21}-\sqrt{\boxed{22}}+\dfrac{\sqrt{\boxed{23}}}{\boxed{24}}$ である.

(2) 方程式

$$4^x+4^{-x}-2^{x+3}+2^{-x+3}+14=0$$

の解は $x=\log_2\left(\boxed{25}+\sqrt{\boxed{26}}\right)$ である.

(3) 原点Oの座標平面上に点 $\mathrm{A}(2\sqrt{3}\,,\,2)$, $\mathrm{B}(3\,,\,4)$ をとり, 三角形OABをつくる. 辺AB上に点Cを $\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{BOC}$ となるように選ぶ. さらに, 点Cから直線OAに垂線CDをひく. このとき, 点Cは辺ABを $\boxed{27}:\boxed{28}$ に内分する点であり, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と表すとき, $k=\dfrac{\boxed{29}}{\boxed{30}}+\dfrac{\sqrt{\boxed{31}}}{\boxed{32}}$ である.

(4) 関数 $f(x)=\dfrac{7x}{8x+3}$ を用いて数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ をつぎで定める:

$$\begin{cases} a_{n+1}=f(a_n),\ a_1=\dfrac{1}{3}, \\ \quad b_n=\dfrac{1}{a_n}, \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \end{cases}$$

このとき, 数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n=\boxed{33}+\left(\dfrac{\boxed{34}}{\boxed{35}}\right)^{n-1}$ である.

計算用余白

[3] 楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上を点 P は動くとする．また，2 点 A $\left(-1,\ -\dfrac{3}{2}\sqrt{2}\right)$, B $\left(0,\ -2\sqrt{2}\right)$ をとる．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 3 点 A, B, P を順に線分で結んでできる三角形 ABP の面積が最大値をとるのは点 P の座標が $\left(\dfrac{\boxed{36}}{\boxed{37}},\ \dfrac{\boxed{38}}{\boxed{39}}\sqrt{\boxed{40}}\right)$ のときであり，そのときの三角形 ABP の面積は $\dfrac{\boxed{41}}{\boxed{42}}\sqrt{\boxed{43}}$ である．

(2) 点 B を通り，第 4 象限で楕円に接する直線の方程式は $y=\boxed{44}x-\boxed{45}\sqrt{\boxed{46}}$ であり，接点の座標は $\left(\dfrac{\sqrt{\boxed{47}}}{\boxed{48}},\ -\sqrt{\boxed{49}}\right)$ である．

(3) 点 P が楕円上を 1 周するとき，三角形 ABP の周および内部が通る領域の面積は $\dfrac{\boxed{50}\sqrt{\boxed{51}}+\boxed{52}+\boxed{53}\pi}{\boxed{54}}$ である．

計算用余白

以下の問題 [4]，[5] は，「数学記述式問題解答用紙」に解答しなさい．

[4] 放物線 $y=4x^2$ 上に 2 点 P$(a, 4a^2)$，Q$(b, 4b^2)$ をとる．ただし，$a<b$ とする．点 P における放物線の接線を l_{P}, 点 Q における放物線の接線を l_{Q} とするとき，l_{P} と l_{Q} は 1 点 R において垂直に交わるとする．
このとき，以下の問いに答えなさい．

(1)　点 R の y 座標は常に $-\dfrac{1}{16}$ であることを示しなさい．

(2)　3 点 P，Q，R を線分で結び，三角形 PQR を作る．三角形 PQR の面積を求めて F^3 という形で表しなさい．ただし，F は a, b の多項式である．

(3)　三角形 PQR の面積の最小値を求めなさい．

計算用余白

[5] 原点Oの座標空間に3点A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 4)をとり，三角形ABCの辺およびその内部をTで表す．以下の問いに答えなさい．

(1) 原点OからTへ垂線OHをひくとき，点Hの座標を求めなさい．

(2) 図形Tをz軸のまわりに1回転させてできる立体を平面$z=a$で切った切り口の図形の面積を$S(a)$で表すとき，$S(a)$を求めなさい．ただし，$0 \leqq a \leqq 4$とする．

(3) (2)の$S(a)$について
$$\int_1^3 \frac{S'(z)}{S(z)}\,dz$$
を求めなさい．ただし，$S'(z)$は関数$S(z)$の導関数とする．

計算用余白