

数 学 問 題 ・ 答 案 用 紙 (一)

I. 以下 1) ~ 3) の設問に対して, 答えのみを下の解答欄に記入せよ。

1)  $4^{\log_6 5}$ ,  $5^{\log_4 6}$ ,  $6^{\log_5 4}$  の大小を比較せよ。

2) 関数  $y = \frac{ax-1}{x-b}$  の逆関数が  $y = \frac{2x+c}{x+1}$  となるとき,  $a, b, c$  の値を求めよ。

3) すべての実数  $x, y$  に対して  $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + py + q > 0$  が成り立つために定数  $p, q$  がみたすべき条件を求めよ。

解答欄

1)	< <	2)		3)	
----	-----	----	--	----	--

II.  $n$  進法の計算  $3.55_{(n)} \times 5_{(n)} = 22.41_{(n)}$  が成り立つような自然数  $n$  を求めよ。

III. トランプのうちハートマークの13枚, スペードマークの13枚およびジョーカー1枚の合計27枚を用いて, A, B 2名で「ばば抜き」をする。トランプの札は, エース, 2,  $\dots$ , 10, ジャック, クイーン, キングを順に1, 2,  $\dots$ , 10, 11, 12, 13と呼ぶことにする。いずれ勝負はつくとして, 次の問いに答えよ。

1) ゲームが進んで, A はハートの1とジョーカーの計2枚, B はスペードの1のみを持っている状態になったとする。B が先にカードを引くとして, A, B が勝つ確率をそれぞれ  $p_1, q_1$  とするとき,  $p_1$  および  $q_1$  を求めよ。

2) 3以上13以下の奇数  $n$  に対して, A は1, 2,  $\dots$ ,  $n$  の  $n$  枚のハートマークとジョーカーの計  $n+1$  枚のカード, B は1, 2,  $\dots$ ,  $n$  の計  $n$  枚のスペードマークのカードを持っているとする。B が先にカードを引くとして, A, B が勝つ確率をそれぞれ  $p_n, q_n$  とする。このとき, 次の漸化式が成り立つことを示せ。

$$q_n = \frac{1}{n+1}p_n + \frac{n}{n+1}q_{n-2}$$

3) 1) の結果および 2) の漸化式を用いて  $p_{13}, q_{13}$  を求めよ。

- IV.  $n$  を自然数とする。  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  として  $A(1, 0, 1)$ ,  $P_k(1, \frac{k}{\sqrt{2n}}, 0)$ ,  $Q_k(0, \frac{k}{\sqrt{2n}}, 1)$  からなる三角形  $AP_kQ_k$  を考える。三角形  $AP_kQ_k$  の面積を  $S_k$  とするとき、極限值

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_n} \right)$$

を求めよ。