

数 学 問 題 ・ 答 案 用 紙 (一)

I. 次の 1) ~ 3) の設問に対して、答えのみを下の解答欄に記入せよ。

1) 2次方程式 $x^2 + (2m + 3)x + m + 3 = 0$ が整数の解をもつときの整数 m の値をすべて求めよ。

2) 当たりくじ 1本を含む n 本のくじの中から 1本ずつくじを引く試行について、次の問いに答えよ。ただし、引いたくじはもとに戻すものとする。

(a) n 回引いてすべて外れである確率 $p(n)$ を求めよ。

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n)$ を求めよ。

3) $0 < t < 1$ のとき、関数 $f(x) = \frac{\log x}{x} - \frac{t}{x}$ ($1 \leq x \leq e$) について、次の問いに答えよ。

(a) $f(x) \geq 0$ となる x の値の範囲を求めよ。

(b) 不定積分 $\int f(x) dx$ を求めよ。

(c) 定積分 $\int_1^e \left| \frac{\log x}{x} - \frac{t}{x} \right| dx$ の値を I とするとき、 I の最小値とそのときの t の値を求めよ。

解答欄

1)

--

2)

(a)		(b)	
-----	--	-----	--

3)

(a)		(b)	
-----	--	-----	--

(c)	
-----	--

II. 関数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ($x > 0$) について, 次の問いに答えよ。

1) $f(x)$ の導関数を求めよ。

2) k を自然数とすると, 不等式 $\frac{1}{\sqrt{k+1}} < \int_k^{k+1} f(x) dx < \frac{1}{\sqrt{k}}$ が成り立つことを示せ。

3) $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{k}}$ を超えない最大の整数を求めよ。

III. 球面 $C: x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 3$ 上の点 $A(1, 3, 2)$ で球面 C に接する平面を S とする。点 P は平面 S 上の点であり、点 Q は線分 OP 上の点であって $OP \cdot OQ = 6$ をみたしているとき、次の問いに答えよ。

1) 原点 O から平面 S に下ろした垂線を OH とするとき、 OH の長さを求めよ。

2) P が H と異なる点であるとき、線分 HP の長さを t とする。線分の長さの比 $\frac{OQ}{OP}$ を t を用いて表せ。

3) $OM \cdot OH = 6$ をみたす線分 OH 上の点を M とするとき、内積 $\vec{OQ} \cdot \vec{MQ}$ を計算せよ。

4) 点 P が平面 S 上を動くときに点 Q はある球面上を動くことを示し、その球面の方程式を求めよ。