

数 学

第1問 次の問いに答えよ。

- (1) 0, 1, 2, 3の各数字をそれぞれ3つずつ使ってできる12桁の正の整数の個数を求めよ。
- (2) 異なる3つの複素数 $0, \alpha, \beta$ の間に等式 $\alpha^2 - 3\alpha\beta + 3\beta^2 = 0$ が成り立つとき、複素数平面上の原点 $O(0)$, 点 $A(\alpha)$, 点 $B(\beta)$ を頂点とする $\triangle OAB$ の $\angle OBA$ を求めよ。
- (3) 定積分 $\int_0^{2\pi} \left| x \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right| dx$ を求めよ。
- (4) 座標平面上の双曲線 $\left(\frac{x}{20}\right)^2 - \left(\frac{y}{21}\right)^2 = 1$ の焦点を求めよ。
- (5) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}$ を求めよ。

第2問

$3^\pi > \pi^3$ を示せ。

ただし e を自然対数の底とするとき、 $e < 3 < \pi$ である。

第3問 次の問いに答えよ。

(1) 循環小数の差 $0.3\bar{1}2 - 0.1\bar{3}24$ を既約分数で表せ。

(2) 2016 のすべての正の約数の和を求めよ。

(3) 数列の和 $\sum_{k=1}^{2016} \cos^2\left(\frac{k}{56}\pi\right)$ を求めよ。

(4) $\triangle ABC$ において、 $AB = 5, AC = 8, \angle BAC = 60^\circ$ のとき、三角形の外接円の半径を R 、三角形の内接円の半径を r とする。 $\frac{R}{r}$ の値を求めよ。

(5) 座標空間の2点 $A(2, 1, 4)$ 、 $B(3, 0, 5)$ を通る直線 l に点 $C(1, 3, 2)$ から垂線を下ろし、直線 l との交点を H とする。点 H の座標を求めよ。

第4問

整数 a, b, c が $0 < a < b < c$ であり、かつ $(a+b+c)(ab+bc+ca) = abc + 350$ をみたすとき、 a, b, c を求めよ。