

第1問 次の問いに答えよ。

- (1) $x > 0$ で定義される関数 $f(x) = x^x$ の導関数を $f'(x)$ とするとき、 $f'(e)$ を求めよ。ただし、 e は自然対数の底である。
- (2) 複素数 z が $|z - 2 - i| = 2$ を満たすとき、 $|z|$ の最大値を求めよ。
- (3) 座標空間に3点 $A(1, 1, 0)$ 、 $B(0, 1, 1)$ 、 $C(1, 2, 1)$ がある。3点 A 、 B 、 C を含む平面上で、三角形 ABC の周または内部にあり、点 A との距離が 1 以下の領域の面積を求めよ。
- (4) 袋の中に赤球 8 個と白球 4 個がある。この中から無作為に 2 個を同時に取り出すとき、1 個が赤球、1 個が白球である確率を求めよ。
- (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ の値を求めよ。
- (6) $(x^2 - 3y)^6$ の展開式における $x^6 y^3$ の係数を求めよ。
- (7) 学生 5 名の身長 $x(\text{cm})$ と体重 $y(\text{kg})$ を測定した結果を表に示す。 x と y の相関係数を求めよ。ただし、小数第 3 位を四捨五入すること。

	A	B	C	D	E
身長 $x(\text{cm})$	181	167	173	169	165
体重 $y(\text{kg})$	75	59	63	67	61

- (8) すべての実数 x について、 $\sin x + \sin(x + \alpha) + \sin(x - \alpha) = 0$ が成り立つような定数 α を求めよ。ただし、 $0 \leq \alpha < \pi$ とする。

第2問 次の問いに答えよ。

(1) $\sqrt{a} = \frac{\sqrt{3+\sqrt{2}} - \sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{3-\sqrt{7}}}$ を満たす整数 a を求めよ。

(2) $n^2 > k$ を満たす任意の正の整数 n, k に対し、

$$\frac{\sqrt{n+\sqrt{k}} - \sqrt{n-\sqrt{k}}}{\sqrt{n-\sqrt{n^2-k}}}$$

は n, k によらない定数となることを示し、この定数を求めよ。

(3) 1 よりも大きい任意の整数 n に対し、

$$\frac{\sum_{k=1}^{n^2-1} \sqrt{n-\sqrt{k}}}{\sum_{k=1}^{n^2-1} \sqrt{n-\sqrt{n^2-k}}}$$

は n によらない定数となることを示し、この定数を求めよ。

(4) 1 よりも大きい任意の整数 n に対し、

$$\frac{\sum_{k=1}^{n^2-1} \sqrt{n+\sqrt{k}}}{\sum_{k=1}^{n^2-1} \sqrt{n-\sqrt{k}}}$$

は n によらない定数となることを示し、この定数を求めよ。

第3問 xy 平面上に点P, 点Q, および1辺の長さが1で各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形 S がある。点P, 点Q, 正方形 S は次の3つの条件すべてを満たしながら動く。

条件1: 点Pは半直線 $y = x (x \geq 0)$ 上に存在する。

条件2: 点Qは半直線 $y = -x (x \leq 0)$ 上に存在する。

条件3: 点P, 点Qは異なる2点であり, 正方形 S の周上または内部に存在する。

線分PQ上の点の存在しうる領域 R を xy 平面上に図示し, R の面積を求めよ。