

平成 27 年度一般入学試験問題

数 学

【注意事項】

1. この問題用紙には答案用紙が挟み込まれています。試験開始の合図があるまで問題用紙を開いてはいけません。
2. 試験開始の合図があれば、問題用紙と答案用紙の受験番号欄に受験番号を記入しなさい。
3. 問題用紙には計 3 問の問題が数 1～数 5 ページに記載されています。落丁、乱丁および印刷不鮮明な箇所があれば、手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 答案用紙には、解答とともに、解答を得るまでの途中の計算や推論の過程も示しなさい。
5. 問題用紙の余白は下書きに利用しても構いません。
6. 問題用紙を持ち帰ってはいけません。

受験番号	
------	--

1

次の(1)から(5)までの各問いに答えよ。最終的な解答は答の欄に記入すること [配点 70 点]。

(1) $x^2 + x + 1 = 0$ の相異なる解を α, β とするとき、

$\alpha^{-2015} + \alpha^{-2014} + \dots + \alpha^{-2} + \alpha^{-1} + 1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^{2014} + \beta^{2015}$ の値を求めよ [10 点]。

(2) 実数全体で定義された関数 $f(x)$ が、次の3つの条件 (i), (ii), (iii) をすべて満たしている。関数 $f(x)$ を求めよ [15 点]。

(i) すべての実数 x について微分可能で、 $f'(0) = 1$ である。

(ii) すべての実数 x について、 $f(x) > 0$ である。

(iii) すべての実数 x, y について、 $f(x+y) = f(x)f(y)e^{-xy}$ が成り立つ。

1

(続き)

(3) 数列 $1, 1, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 1, 2, \dots$ の第 n 項を a_n とする [15 点]。

① 初めて, $a_n = 7$ となる n を求めよ。

② 初めて, $a_n = m$ となる n を l とするとき, $\sum_{k=1}^l a_k$ を求めよ。

(4) m, n は $m \geq n$ を満たす自然数とする [15 点]。

① $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{8}$ を満たす自然数の組 (m, n) をすべて求めよ。

② p を 3 以上の素数, t を自然数とするとき, $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{p^t}$ を満たす自然数の組 (m, n) を p, t を用いて表せ。

1

(続き)

(5) c を定数とし, 3 次方程式 $2x^3 + 7x^2 + 4x + c = 0$ は, 相異なる 3 個の実数解を持つとする [15 点]。

- ① 定数 c の値の範囲を求めよ。
- ② 異なる 3 つの解を α, β, γ ($\alpha < \beta < \gamma$) として, β が $\beta < -1$ を満たすとき, c の値の範囲と解 α, γ の値の範囲をそれぞれ求めよ。

2

点 O を原点とする座標空間に、4 点 $A(-2, 3, 1)$, $B(-1, -1, -2)$, $C(1, 1, 1)$, $P(3, a, 0)$ がある。次の各問いに答えよ [配点 40 点]。

- (1) 点 A から直線 OB に引いた垂線と直線 OB との交点を G とするとき、線分 OG の長さを求めよ。
- (2) 点 C から平面 OAB に引いた垂線と平面 OAB との交点を H とするとき、線分 CH の長さ と四面体 $OABC$ の体積をそれぞれ求めよ。
- (3) 四面体 $OABC$ の外接球の中心と半径をそれぞれ求めよ。
- (4) 四面体 $OABP$ の体積が、四面体 $OABC$ の体積の半分となるとき、定数 a の値を求めよ。

3 1 から m までの m ($m \geq 2$) 個の自然数からなる順列 a_1, \dots, a_m を考える。

$a_i \neq i$ ($i = 1, \dots, m$) を満たす順列の個数を N_m で表す。次の各問いに答えよ [配点 40 点]。

(1) N_2, N_3, N_4, N_5 をそれぞれ求めよ。

(2) $m \geq 4$ のとき, N_m を N_{m-1}, N_{m-2} を用いて表せ。

(3) $\frac{N_m}{m!}$ を m を用いて表せ。